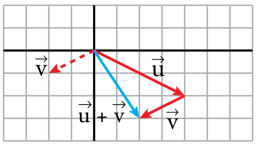
Autoevaluación

1. **Dados los vectores $\vec{u}(4, -2)$ y $\vec{v}(-2, -1)$:**

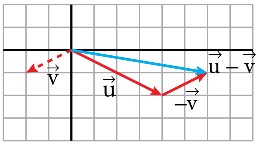
a) Representa los vectores $\vec{u}+\vec{v}$; $\vec{u}-\vec{v}$; $\frac{1}{2}\vec{u}$ y $-3\vec{v}$ y halla sus coordenadas.

b) Calcula las coordenadas del vector $\vec{w} = 2\vec{u} + 3\vec{v}$.

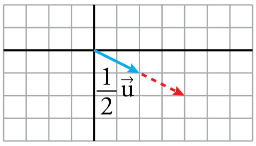
a)



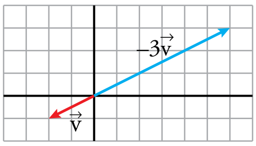
$\vec{u}+\vec{v} = (4, -2) + (-2, -1) = (2, -3)$



$\vec{u}-\vec{v} = (4, -2) - (-2, -1) = (6, -1)$



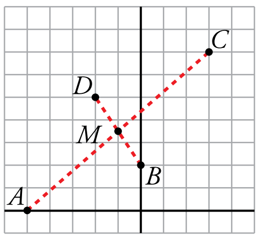
$\frac{1}{2}\vec{u} = \frac{1}{2}(4, -2) = (2, -1)$



$-3\vec{v} = -3(-2, -1) = (6, 3)$

b) $\vec{w} = 2\vec{u} + 3\vec{v} \rightarrow \vec{w} = 2(4, -2) + 3(-2, -1) \rightarrow \vec{w} = (8, -4) + (-6, -3) \rightarrow \vec{w} = (2, -7)$

2. **Representa los puntos $A(-5, 0)$, $B(0, 2)$, $C(3, 7)$ y $D(-2, 5)$ y comprueba analíticamente que el punto medio de AC coincide con el punto medio de BD.**



Punto medio de AC: $M\left(\frac{-5+3}{2}, \frac{0+7}{2}\right) \rightarrow M\left(-1, \frac{7}{2}\right)$

Punto medio de BD: $M\left(\frac{0+(-2)}{2}, \frac{2+5}{2}\right) \rightarrow M\left(-1, \frac{7}{2}\right)$

3. **Halla el simétrico de $P(-7, -15)$ respecto de $M(2, 0)$.**

Sea $Q(a, b)$ el simétrico de P respecto de M. M es el punto medio de PQ.

$$M_{PQ} = \left(\frac{-7+a}{2}, \frac{-15+b}{2}\right) = (2, 0) \begin{cases} -7 + a = 4 \rightarrow a = 11 \\ -15 + b = 0 \rightarrow b = 15 \end{cases}$$

4. Halla el valor de k para que los puntos $A(1, -5)$, $B(3, 0)$ y $C(6, k)$ estén alineados.

Para que A, B y C estén alineados, debe ser $\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{BC}$ y, por tanto, sus coordenadas proporcionales.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (3, 0) - (1, -5) = (2, 5) \\ \overrightarrow{BC} = (6, k) - (3, 0) = (3, k) \end{array}\right\} \ \frac{2}{3} = \frac{5}{k} \ \rightarrow \ k = \frac{15}{2}$$

5. Escribe las ecuaciones vectorial, paramétricas, en forma continua y explícita de la recta que pasa por el punto $P(3, -2)$ y tiene por vector dirección $\vec{d}(-1, 5)$.

ECUACIÓN VECTORIAL: $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + t\vec{d}$

$(x, y) = (3, -2) + t \cdot (-1, 5)$

ECUACIONES PARAMÉTRICAS: $\begin{cases} x = 3 - t \\ y = -2 + 5t \end{cases}$

ECUACIÓN CONTINUA: $\dfrac{x - 3}{-1} = \dfrac{y + 2}{5}$

ECUACIÓN EXPLÍCITA: Despejando y en la ecuación anterior:

$$5x - 15 = -y - 2 \ \rightarrow \ y = -5x + 13$$

6. Obtén las ecuaciones de las rectas r y s y su punto de intersección:

r pasa por $(-3, 2)$ y es perpendicular a $8x - 3y + 6 = 0$.

s pasa por $(9, -5/2)$ y es paralela a $2x + y - 7 = 0$

- La pendiente de $8x - 3y + 6 = 0$ es $m = \dfrac{8}{3}$.

  La pendiente de r es $m' = -\dfrac{3}{8}$.

  $r: y = 2 - \dfrac{3}{8}(x + 3) \ \rightarrow \ 8y = 16 - 3x - 9 \ \rightarrow \ 3x + 8y - 7 = 0$

- La pendiente de s es $m = -2$.

  $s: y = -\dfrac{5}{2} - 2(x - 9) \ \rightarrow \ 2y = -5 - 4x + 36 \ \rightarrow \ 4x + 2y - 31 = 0$

- Punto de corte:

  $\begin{cases} 3x + 8y - \ \ 7 = 0 \\ 4x + 2y - 31 = 0 \end{cases} \ \rightarrow \ x = 9, \ y = -\dfrac{5}{2}$

  Las rectas se cortan en el punto $\left(9, -\dfrac{5}{2}\right)$.

7. En el triángulo de vértices $A(-2, 2)$, $B(0, 7)$ y $C(6, 4)$, halla la ecuación de la mediana que parte de B.

La mediana que parte de B pasa por B y el punto medio del segmento AC.

$$M_{AC} = \left(\frac{-2 + 6}{2}, \frac{2 + 4}{2}\right) = (2, 3)$$

Ecuación de la mediana: $\dfrac{x - 0}{2 - 0} = \dfrac{y - 7}{3 - 7} \ \rightarrow \ -4x = 2y - 14 \ \rightarrow \ 2x + y - 7 = 0$

8. Calcula la longitud de los lados del triángulo de vértices $A(-4, 1)$, $B(6, 3)$ y $C(-2, -3)$.

$\overrightarrow{AB} = (10, 2)$; $\overrightarrow{AC} = (2, -4)$; $\overrightarrow{BC} = (-8, -6)$, por tanto:

$$\overline{AB} = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{10^2 + 2^2} = \sqrt{104} = 2\sqrt{26}$$

$$\overline{AC} = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{2^2 + (-4)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$\overline{BC} = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(-8)^2 + (-6)^2} = \sqrt{100} = 10$$

9. Estudia la posición relativa de estas rectas:

$$\boldsymbol{r: 2x + y - 2 = 0} \qquad \boldsymbol{s: x + \frac{1}{2}y = 1}$$

$$\left.\begin{array}{l} r: 2x + y - 2 = 0 \xrightarrow{(*)} x + \frac{1}{2}y - 1 = 0 \rightarrow x + \frac{1}{2}y = 1 \\ s: x + \frac{1}{2}y = 1 \end{array}\right\} \text{Son la misma recta.}$$

(*) Dividimos por 2.

10. Halla la ecuación de la circunferencia que tiene su centro en el punto $C(0, -3)$ y pasa por el punto $A(3, 0)$.

- Radio de la circunferencia = *dist* $(A, C) = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(0-3)^2 + (-3-0)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$

- $$\left.\begin{array}{l} \text{Centro} \rightarrow C(0, -3) \\ \text{Radio} \rightarrow r = \sqrt{18} \end{array}\right\} \rightarrow c: (x-0)^2 + (y+3)^2 = 18 \rightarrow c: x^2 + y^2 + 6y - 9 = 0$$